113年公務人員高等考試三級考試試題

類　　科：天文
科　　目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）
考試時間：2 小時　　　　　　　　　　　　　　　　　　座號：＿＿＿＿＿＿＿

※注意：㈠禁止使用電子計算器。
㈡不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈢本科目得以本國文字或英文作答。

一、令 $A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & -4\end{bmatrix}$，回答以下兩小題：

㈠求 P 使得 $P^{-1}AP=D$，其中D為一對角矩陣（diagonal matrix）。（10 分）

㈡求 $\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$ 的一般解（general solutions），並證明此一般解 $\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$滿足 $\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}y(t)=0$。（15 分）

二、求從 $t=1$ 追蹤到 $t=2$ 的螺旋（helix）$r(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)=(\cos t,\sin t,3t)$ 之弧長。（15 分）

三、令函數 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，$g(x,y,z)=x^2+2y^4+3z^6$，求在 $g(x,y,z)=3$ 的條件下，$f(x,y,z)$ 的最大值，並分別找出此時相對應的所有點 (x,y,z)。（20 分）

四、令函數 $f(x,y,z)=3xy-2yz$，單位向量 $\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，向量場 $\vec{V}(x,y,z)=(2z,3y,x-z)$，分別求以下四個量：（每項各 5 分，共 20 分）

㈠ grad $f=\nabla f(x,y,z)$，方向導數 $\nabla_{\vec{u}}f(1,0,1)$。

㈡ $\mathrm{curl}\big(\vec{V}\big)$，$\mathrm{div}\Big(\mathrm{curl}\big(\vec{V}\big)\Big)$。

五、利用函數 $u(x,t)$對x的傅立葉轉換（Fourier transform）

$\hat{u}(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}u(x,t)dx$，證明$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}f(y)dy$

是下述熱傳導方程的解：$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t),-\infty<x<\infty,\\ v(x,0)=f(x),-\infty<x<\infty,\end{cases}$

其中函數$f(x)$滿足$\int_{-\infty}^{\infty}(f(x))^2dx<\infty$。（20 分）